APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN LA INGENIERIA CIVIL

TITULO

APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN LA INGENIERIA CIVIL

ASIGNATURA

MATEMATICA III

TUTOR

ING.MIGUEL ENRIQUE UCAÑAN DIAZ

INTEGRANTES

CARDENAS FLORES OLMEDO

TUESTA VILLACORTA GEAN CARLOS

GONZALES QUINCHO LUIS

TARAPOTO - PERU

“El ingeniero civil nunca muere, por sus obras se mantiene en el tiempo”.

DEDICATORIA

Dedicamos este trabajo a nuestras familias por el apoyo incondicional que nos brindan durante todas las etapas de nuestras vidas particularmente en esta. Al docente por sus enseñanzas y sus sabios conocimientos, que de ellos aprendemos día a día, donde cada clase enriquecemos con dedicación y esfuerzo mis conocimientos.

AGRADECIMIENTO

INTRODUCCION

Demostrar cómo las ecuaciones diferenciales pueden ser útiles en la solución de variados tipos de problemas-en particular, mostrar cómo traducir problemas a un lenguaje de ecuaciones diferenciales, esto es, establecer la formulación matemática de problemas; resolver la ecuación diferencial resultante sujeta a condiciones dadas; y interpretar las soluciones obtenidas. Problemas elementales de muchos campos diferentes e importantes se explican en relación a su formulación matemática, solución, e interpretación. Las aplicaciones están ordenadas de modo tal que los estudiantes de ingeniería civil puedan desarrollar y aplicar en la carrera estas ecuaciones.

ÍNDICE

CAPITULO I

CONCEPTO BASICOS DEL TRABAJO

1.1. Teoría sobre las Ecuaciones Diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuación en la que intervienen derivadas de una o más funciones. Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se deriva, las ecuaciones diferenciales se dividen en:

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Aquéllas que contienen derivadas respecto a una sola variable independiente.

Ecuaciones en derivadas parciales

Aquéllas que contienen derivadas respecto a dos o más variables.

ALGUNOS EJEMPLOS DE ECACIONES DIFERENCIALES SON:

• es una ecuación diferencial ordinaria, donde

es la variable dependiente, la variable independiente,

es la derivada de con respecto a .

• La expresión es una ecuación en derivadas parciales.

A la variable dependiente también se le llama función incógnita (desconocida). La resolución de ecuaciones diferenciales es un tipo de problema matemático que consiste en buscar una función que cumpla una determinada ecuación diferencial. Se puede llevar a cabo mediante un método específico para la

ecuación diferencial en cuestión o mediante una transformada (como, por ejemplo, la transformada de Laplace).

ORDEN Y GRADO DE UNA ECUACION DIFERENCIAL

- Orden de la ecuación

El orden de la derivada más alta en una ecuación diferencial se llama orden de la ecuación

- Grado de la ecuación

Es la potencia de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación, siempre y cuando la ecuación este en forma polinómica, de no ser así se considera que no tiene grado.

EJEMPLOS:

-

1.2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Las ecuaciones diferenciales ordinarias se distinguen de las ecuaciones diferenciales parciales, las cuales involucran derivadas parciales de varias variables.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son importantes en diversas áreas de estudio como la geometría, mecánica y astronomía, además de muchas otras aplicaciones.

Soluciones analíticas

Existen métodos de resolución generales para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales que permiten encontrar soluciones analíticas. En particular silos coeficientes de la ecuación lineal son constantes o periódicos la solución es casi siempre fácil de construir. Para coeficientes no constantes o no periódicos, pero que son desarrollables enserie de Taylor o serie de Laurent es aplicable conciertas restricciones el método de Frobenius .

Para las ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales no existen métodos generales

Soluciones numéricas

Algunos de los métodos de solución numérica de ecuaciones diferenciales son el método de Runge-Kutta,los métodos multipaso y los métodos de extrapolación.

¬ Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Una ecuación diferencial de primer orden con la condición inicial se expresa de la siguiente forma:

Entre los tipos de EDOs de primer orden se encuentran:

♣ Ecuación de variables separables

Son EDOs de la forma:

♣ Ecuación exacta

Una ecuación de la forma:

|

♣ Ecuación lineal

Una ecuación diferencial es lineal si presenta la forma:

Y que tienen por solución:

♣ Ecuación de Bernoulli.

Una ecuación diferencial de Bernoulli, que es a su vez una generalización dela ecuación diferencial lineal, fue formulada por Jakob Bernoulli y resuelta por su hermano ,Johann Bernoulli y presenta la forma:

♣ Ecuación de Riccati

Una ecuación diferencial tiene la forma de la introducida por Jacobo Francesco Riccati cuando presenta la estructura:

♣ Ecuación de Lagrange

Una ecuación diferencial de Lagrange presenta la forma:

♣ Ecuación de Clairaut

Una ecuación diferencial de Clairaut, llamada así en honor a Alexis-Claude Clairaut, tiene la forma:

1.3 ECUACION DIFERENCAILES PARCIALES

En matemáticas una ecuación en derivadas parciales (a veces abreviado como EDP)es una relación entre una función u de varias variables independientes x,y,z,t ....y las derivadas parciales de u respecto de esas variables. Las ecuaciones en derivadas parciales se emplean en la formulación matemática de procesos de la física y otras ciencias que suelen estar distribuidos en el espacio y el tiempo. Problemas típicos son la propagación del sonido o del calor, la electrostática, el electro dinámico, la dinámica de fluidos, la elasticidad, la mecánica cuántica y muchos otros.

Una ecuación en derivadas parciales (EDP) para la función tiene la siguiente forma.

o Una ecuación en derivadas parciales muy simple puede ser:

o Por lo tanto la solución general de esta ecuación diferenciales:

Solución general y solución completa

Toda ecuación en derivadas parciales de primer orden posee una solución dependiente de una función arbitraria, que se denomina usualmente solución general de la EDP. En muchas aplicaciones físicas esta solución general es menos importante que las llamadas soluciones completas.

Una solución completa es una solución particular de la EDP que contiene tantas constantes arbitrarias independientes como variables independientes intervienen en la ecuación. Por ejemplo la integración de las ecuaciones del movimiento de un sistema mecánico mediante el método basado en el ecuación de Hamilton-Jacob i requiere una integral completa, mientras que la solución general resulta menos interesante desde el punto de vista físico.

Clasificación de las EDP de segundo orden

Las EDP de segundo orden se clasifican habitualmente dentro de cuatro tipos de EDP que son de interés fundamental, a continuación se dan ejemplos de estos cuatro tipos

CAPITULO II

2.1 EL RESORTE VIBRANTE. MOVIMIENTO ARMONICO

SIMPLE

Tal vez el sistema más simple disponible para estudiar el movimiento vibratorio consiste de un resorte ordinario de peso despreciable [Fig. 5.1(a)] suspendido verticalmente de un soporte fijo. Suponga que un peso W se cuelga del resorte [Figura 5.1(b)]. Cuando el peso está en reposo describimos su posición como la posición de equilibrio. Si el peso se halla hacia abajo una cierta distancia y luego se suelta, estará bajo un movimiento vibratorio alrededor de la posición de equilibrio [Figura 5.1(c)]. Nuestro propósito en esta sección es discutir el movimiento del peso en este y similares casos. Para conseguir este propósito, tendremos que conocer las fuerzas que actúan sobre el peso durante su movimiento. Es claro por experiencia que hay una fuerza tendiente a regresar o restaurar un peso desplazado a su posición de equilibrio.

Esta fuerza se llama la fuerza restauradora. La ley que gobierna esta fuerza es un caso especial de la ley generalizada de Hooke. Nos referiremos a este caso especial como la ley de Hooke, la cual se enuncia como sigue:

Ley de Hooke. La fuerza ejercida por un resorte, tendiente a restaurar el peso W a la posición de equilibrio, es proporcional a la distancia de W a la posición de equilibrio. (Algunas veces se abrevia como “la fuerza es proporcional al alargamiento”.)

Denote la magnitud de la fuerza restauradora por 1 I f I, y sea x la posición de W medida desde la posición de equilibrio. Asuma la dirección positiva hacia abajo, de modo que n es positiva cuando W está por debajo de la posición de equilibrio y negativo cuando W esté por encima de esta posición. De acuerdo a la ley de Hooke,

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad que depende de la dureza del resorte y se llama la constante del resorte. Para determinar la dirección de la fuerza, note que cuando $x > 0$ la fuerza está dirigida hacia arriba y por tanto negativa. Cuando $x < 0$ la fuerza está dirigida hacia abajo y es por tanto positiva. Esto se puede satisfacer sólo si la fuerza está dada tanto en magnitud como dirección por $- kx$, de modo que la ley de Hooke es:

Cuando el peso W se coloca en el resorte, se estira una distancia s como en la Figura 5.1 (b). De acuerdo a la ley de Hooke, la tensión T, en el resorte es

proporcional al estiramiento, y así T, = ks. Puesto que el resorte y el peso están en equilibrio se tiene que:

Cuando el peso se halla más y se suelta, su posición en cualquier tiempo se muestra en la Figura 5.1(c). La tensión T, en el resorte en este tiempo es, de acuerdo a la ley de Hooke.

Sigue que la fuerza neta en la dirección positiva está dada por:

Así por la ley de Newton la ecuación del movimiento es

2.2 EJEMPLO

Se encontró experimentalmente que un peso de 6 Ib estira un resorte 6 pul. Si el eso se halla 4 pul por debajo de la posición de equilibrio y se suelta:

(a) Establezca una ecuación diferencial y condiciones asociadas que describan el movimiento; (b) Encuentre la posición del peso como una función del tiempo y (c) determine la posición, velocidad y aceleración del peso i seg después de haberse soltado.

(b) Formulación matemática. Por la ley de Hooke (puesto que 6 pu1 = 4 pie), IfI = k X 1, ó 6 = k l $;!‘esto es, k = 12. La ecuación diferencial que describe el movimiento es por tanto

Puesto que inicialmente (t = 0) el peso está 4 pu1 por debajo de la posición de equilibrio, tenemos:

x=1/3(pie) e n t = 0

También, puesto que el peso se suelta (esto es, tiene velocidad cero) en t = 0,

Solución La ecuación auxiliar para (5) es m2 + 64= 0 y tiene raíces m = + 8i. De donde la ecuación diferencial tiene la solución:

x = A cos 8t + Bsen8t

De la condición encontramos A = 1/3, así que

Usando la condición (7), encontramos ahora B = 0. De donde, la solución requerida es

x = 1/2 cos 8r

La cual da la respuesta a la parte (b). Note que en la ecuación (S), x está en pies. Si se desea medir x en pulgadas, la ecuación sería x = 4 cos 8t. Volvamos a la parte (c). Diferenciando (8) con respecto a t, vemos que

Colocando t = 4 y usando el hecho de que 4 radianes = 4 x (180/pi) grados = 229 grados, aproximadamente, encontramos:

Así después de 1/2 seg el peso está a 0,219 pies por encima de la posición de equilibrio y está viajando hacia abajo con velocidad 2,01 pies/seg y aceleración 14,0 pies/seg2.

CAPITULO III

3.1 CONCEPTOS BACICOS

PÉNDULO: Llamamos péndulo a todo cuerpo que puede oscilar con respecto de un eje fijo.

Péndulo ideal, simple o matemático: Se denomina así a todo cuerpo de masa m (de pequeñas dimensiones) suspendido por medio de un hilo inextensible y sin peso. Estas dos últimas condiciones no son reales sino ideales; pero todo el estudio que realizaremos referente al péndulo, se facilita admitiendo ese supuesto .

Péndulo físico: Si en el extremo de un hilo suspendido sujetamos un cuerpo cualquiera , habremos construido un péndulo físico. Por esto, todos los péndulos que se nos presentan (columpios, péndulo de reloj, una lámpara suspendida, la plomada) son péndulos físicos.

3.2 Oscilación - Amplitud - Período y Frecuencia:

A continuación estudiaremos una serie de procesos que ocurren durante la oscilación de los péndulos y que permiten enunciar las leyes del péndulo.

Daremos previamente los siguientes conceptos:

Longitud del péndulo (l) : es la distancia entre el punto de suspensión y el centro de gravedad del péndulo.

Oscilación simple: es la trayectoria descrita entre dos posiciones extremas (arco AB).

Oscilación completa o doble oscilación: es la trayectoria realizada desde una posición extrema hasta volver a ella, pasando por la otra extrema (arco ABA).

Angulo de amplitud o amplitud (alfa): es el ángulo formado por la posición de reposo (equilibrio) y una de las posiciones extremas.

Período o tiempo de oscilación doble (T): es el tiempo que emplea el péndulo en efectuar una oscilación doble.

Tiempo de oscilación simple (t): es el tiempo que emplea el péndulo en efectuar una oscilación simple.

Elongación (e): Distancia entre la posición de reposo OR y cualquier otra posición.

Máxima elongación: distancia entre la posición de reposo y la posición extrema o de máxima amplitud.

Frecuencia (f): Es el número de oscilaciones en cada unidad de tiempo. f=numero de oscilaciones/tiempo

2.3 Relación entre frecuencia y periodo

T = período ; f = frecuencia

Supongamos un péndulo que en 1 seg. cumple 40 oscilaciones.

En consecuencia: 40 oscilaciones se cumplen en 1 seg., por lo que 1 osc. se cumple en T=1/40 seg (periodo) .

Obsérvese que: el período es la inversa de la frecuencia.

En símbolos: T=1/f y f=1/T

Leyes del péndulo:

Ley de las masas

Suspendamos de un soporte (por ejemplo: del dintel de una puerta) tres hilos de coser de igual longitud y en sus extremos atemos sendos objetos de masas y

sustancias diferentes . Por ejemplo: una piedra, un trozo de hierro y un corcho. Saquémolos del reposo simultáneamente. Verificaremos que todos tardan el mismo tiempo en cumplir las oscilaciones, es decir, que todos “van y vienen” simultáneamente. Esto nos permite enunciar la ley de las masas:

LEY DE MASAS: Las tres más de la figura son distintas entre sí, pero el periodo (T) de

oscilación es el mismo. ($T1=T2=T3$)

Los tiempos de oscilación de varios péndulos de igual longitud son independientes de sus masas y de su naturaleza, o también El tiempo de oscilación de un péndulo es independiente de su masa y de su naturaleza.

Ley del Isócrono: Dispongamos dos de los péndulos empleados en el experimento anterior. Separémolos de sus posiciones de equilibrio, de tal modo que los ángulos de amplitud sean distintos (pero no mayores de 6 o 7 grados).

Dejémolos libres: comienzan a oscilar, y notaremos que, también en este caso, los péndulos “van y vienen” al mismo tiempo. De esto surge la llamada Ley del isocronismo (iguales tiempos):

Para pequeños ángulos de amplitud, los tiempos de oscilación de dos péndulos de igual longitud son independientes de las amplitudes, o también: El tiempo de oscilación de un péndulo es independiente de la amplitud (o sea, las oscilaciones de pequeña amplitud son isócronas).

3.4 APLICADO A LA INGENIERIA

En Las matemáticas hay un tema que, se basa en la oscilación armónica de los péndulos, actualmente los edificios rascacielos del Japón usan este principio para contrarrestar los terremotos; colocan en la punta del rascacielos un péndulo de 200 Toneladas de tal forma que al llegar el terremoto, el edificio empieza a oscilar de un lado a otro y en el péndulo igual pero en sentido contrario lo cual elimina el movimiento sísmico y en el edificio no se siente el sismo.

Este tema es un gran reto para los Ingenieros Civiles de nuestra época.

El péndulo de Furuta fue utilizado para evaluar compensadores de fricción. El efecto de la compensación de fricción fue muy bien ilustrado reduciendo los ciclos límite cuando se trata de estabilizar el péndulo.

El compensador de fricción de LuGre basado en observador se comparó con compensadores de fricción clásicos utilizando el modelo de fricción de Coulomb y Karnopp. El desempeño del compensador de LuGre fue ligeramente superior al del compensador de Karnopp.

Una diferencia importante es la suavidad de la fricción estimada con el observador de LuGre. En la sección 3 se abordó el problema global de control mediante el enfoque del control híbrido.

Se diseñó un controlador de energía (controlador swing up) para llevar el péndulo desde su posición colgante natural u otra condición inicial hasta una región cercana a su punto de equilibrio inestable y un controlador local por realimentación de variables de estado con acción integral (PI Vectorial) para su estabilización en dicha posición.

Para escoger que controlador debía entrar en funcionamiento se diseñó una estrategia de conmutación.

Se encontró que esta combinación de controladores ocasiona el fenómeno del wind up en el controlador PI Vectorial causando inestabilidad en el sistema. Para solucionar este problema

se diseñó un integrador condicionado el cual se apaga y se reinicia mientras el controlador swing up se encuentra en operación.

CONCLUSIONES

-Las ecuaciones diferenciales es eje del desarrollo estructural de edificaciones, puentes ya que gracias a ellos podemos determinar su curvatura, su elasticidad, su posición en cualquier instante de tiempo

- La solución de una ecuación diferencial es simplemente una función que satisface a la ecuación: al sustituir esta función en la ecuación diferencial, se obtiene una afirmación matemática cierta, una identidad.

-Las ecuaciones diferencial nos indica la identificación de variables para así demostrar su funcionalidad en el campo de las matemáticas y más en lo ingenieril ya que gracias a ellos damos con certeza su aplicación.

-Toda solución de ecuación diferencial tiene una formula general para cualquier caso presentado para su estudio correspndiente.

BIBLIOGRAFÍA

- Aplicaciones de ecuaciones diferenciales. Disponible en:

Libro aplicaciones de ecuaciones diferenciales.

- Es.scribd.Ecuaciones diferenciales. Disponible en: http://es.scribd.com/doc/95468187/Aplicacion-de-Las-Ecuaciones-Diferenciales-en-la-Ingenieria

- UNIVERSIDAD de los Andes. Ecuación de diferencial. Revisado el 04 de mayo de 2013. Disponible en: http://webdelprofesor.ula.ve/